7/3/2018

▸ Παράδειγμα

• Έχω: $U(\mathbb{Z}_8) = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$,

, μια: $\mathbb{Z}_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$

• Προφανώς: $\langle [1]_8 \rangle = \{[1]_8\} \neq U(\mathbb{Z}_8)$

$\langle [3]_8 \rangle = \{[1]_8, [3]_8\} \neq U(\mathbb{Z}_8)$

$\langle [5]_8 \rangle = \{[1]_8, [5]_8\} \neq U(\mathbb{Z}_8)$

$\langle [7]_8 \rangle = \{[1]_8, [7]_8\} \neq U(\mathbb{Z}_8)$

Άρα η $U(\mathbb{Z}_8)$ ΔΕΝ είναι κυκλική!

• Ερώτηση: Η $\mathbb{Z}_8$ είναι κυκλική? $(\mathbb{Z}_8, +)$

• $\mathbb{Z}_8 = \langle [1]_8 \rangle = \{[1], [2], [3], \ldots, [6], [7], [0]\} = \mathbb{Z}_8$

• Άρα, η $\mathbb{Z}_8$ είναι κυκλική και το $[1]_8$ είναι γεννήτορας της $\mathbb{Z}_8$!

▸ Παράδειγμα Είναι η $U(\mathbb{Z}_7)$ κυκλική?

• Έχω: $U(\mathbb{Z}_7) = \{[1]_7, [2]_7, [3]_7, [4]_7, [5]_7, [6]_7\}$

• Είναι προφανές, ότι: $\langle [2]_7 \rangle = \{[2]_7, [4]_7, [1]_7\} \neq U(\mathbb{Z}_7)$

και:

$\langle [3]_7 \rangle = \{[3]_7, [2]_7, [6]_7, [4]_7, [5]_7, [1]_7\} = U(\mathbb{Z}_7)$

• Άρα, η $U(\mathbb{Z}_7)$ κυκλική, με γεννήτορα το $[3]_7$!

▶ Ορισμός [Έστω $\alpha \in G$. Η τάξη του α είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε $\alpha^n = 1$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός, τότε λέμε ότι το α έχει τάξη άπειρη. Συμβολίζουμε με: $ord_G(\alpha)$ (ή $ord(\alpha)$)

▶ Παραδείγματα [• Βρείτε την τάξη του $[3]_8$, στο $U(\mathbb{Z}_8)$

• Λύση. Έχουμε ότι: $[3]_8^1 = [3]_8$ και:

$$[3^2]_8 = [1]_8 \text{. Άρα } \boxed{ord([3]_8) = 2}$$

• Βρείτε την τάξη του $[3]_8$ στο $\mathbb{Z}_8$.

• Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} [3]_8^1 = [3]_8 \\ [3]_8^2 = 2\cdot[3]_8 = [6]_8 \\ \vdots \\ 8\cdot[3]_8 = [24]_8 = [0]_8 \end{array}\right\} \boxed{ord([3]_8) = 8}$$

▶ Πρόταση [Έστω G ομάδα και $\alpha \in G$. Αν $\alpha^n = 1$, τότε: $\boxed{ord(\alpha) \mid n}$

• Βρείτε την τάξη του 3 στο $\mathbb{Z}$

• <u>Λύση</u>: Προφανώς και $\boxed{ord(3) = \infty}$, καθώς

<u>δεν</u> υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{Z}$, τέτοιος, ώστε:

$$3^n = n \cdot 3 = e_{\mathbb{Z}_8} = 0 \,!$$